www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ، ثابت کنید که رابطه ی زیر به ازای هر عدد طبیعی n بر قرار است : $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^۲}+\frac{۳}{۲^۳}+...+\frac{n}{۲^n}=۲-\frac{n+۲}{۲^n}$	۱/۵
۲	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید . الف) به ازای هیچ دو عدد اول a وb ، عدد a+b اول نیست . ب) اگر x فرد باشد ، آنگاه x (x+۲) هم فرد می باشد .	۱/۵
۳	S یک زیر مجموعه ی ۶۵ عضوی از اعداد طبیعی است ، اگر اعضای S را بر عدد ۱۶ تقسیم کنیم ،نشان دهید دست کم ۵ عضو از S دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ می باشند.	۱
۴	ثابت کنید اگر a,b دو عدد حقیقی باشندکه a+b>۰ ، آنگاه رابطه ی زیر برقرار می باشد. $\frac{a^۳+b^۳}{a+b}\geq ab$	۱/۵
۵	اگر مجموعه ی $A=\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$ باشد ، کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) $\{x\}\subseteq A$ ب) $\{\{x\}\}\in A$	۰/۵
۶	اگر A و B و C هر کدام یک مجموعه باشند : الف) با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید : $A-(A-B)=A\cap B$ ب) اگر $C\neq\phi$ و داشته باشیم : $A\times C=B\times C$ ، آنگاه ثابت کنید: $A=B$	۲/۲۵
۷	اگر $A=\{۱,۲,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۵\}$ و R رابطه ای از A به روی B باشد که به صورت زیر تعریف شده است : ابتدا $A\times B$ را محاسبه کرده و سپس اعضای رابطه ی R را تعیین کنید. $R=\{(x,y)\mid \frac{x+y}{۳}\in N\}$	۱/۲۵
۸	رابطه ی R روی $R\times R-\{۰\}$ بصورت زیر تعریف شده است: $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{۲a-۳}{b}=\frac{۲c-۳}{d}$ الف) ثابت کنید رابطه ی R یک رابطه هم ارزی است . ب) کلاس هم ارزی $[(-۱,۷)]$ را به دست آورید .	۱/۵
	«ادامه سؤالات در صفحه ی دوم»	

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۹	در قسمت های "الف" و" ب" داده شده ی زیر ، با عبارت مناسب جای خالی را تکمیل کنید و در قسمت "ج" با استفاده از واژه داده شده گزاره ها را کامل کنید. الف)هر..... ، یک زیر مجموعه از فضای نمونه ای است. ب) در فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس سالم با یکدیگر ، تعداد زیر مجموعه های فضای نمونه ای آن برابر ..... است. ج) انتخاب یک نقطه از سطح یک دایره،آزمایشی از فضای نمونه ای .....و انتخاب تعداد محصولات معیوب یک کارخانه ، آزمایشی از فضای نمونه ای .....است. (گسسته - پیوسته)	۱
۱۰	روی ۱۵ کارت یکسان، اعداد از یک تا ۱۵ را نوشته ایم ، کارتی را به تصادف خارج می کنیم : الف) پیشامد A را طوری بنویسید که عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد. ب) پیشامد B آن که عدد روی کارت فرد و اول باشد.	۱
۱۱	۴ نفر زن و ۶ نفر مرد ، برای تدریس درس ریاضی آموزشگاهی تقاضا داده اند، امکان استخدام تنها برای سه نفر از آن ها وجود دارد.مطلوبست محاسبه ی احتمال آن که حداقل دو نفر زن انتخاب شوند.	۱/۲۵
۱۲	اگر $S=\{1,2,3,4\}$ فضای نمونه یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم : $p(1)=2p(2)=3p(3)=4p(4)$ مطلوبست محاسبه ی $p(1)$.	۱/۵
۱۳	۵۰ درصد افراد جامعه ای با سواد هستند ، احتمال آن که از ۲۰ نفر آن ها ۶ نفر بیسواد بوده باشند را محاسبه کنید.	۰/۷۵
۱۴	دو عدد حقیقی x, y را به تصادف از بازه ی $[0, 3]$ انتخاب می کنیم ، احتمال آن را حساب کنید که: الف) $x+y\le 2$ ب) $x+y=3$	۱/۵
۱۵	احتمال آنکه دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۵۵ درصد و در درس شیمی قبول شود ۶۰ درصد است ، اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵ درصد باشد ، احتمال آن را بیابید که در هر دو درس قبول شود.	۱
۱۶	برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ثابت کنید : $p(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$	۱
	« موفق باشید »	۲۰ جمع نمره

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$p(1): \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(K): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$ (۰/۲۵) حکم استقراء $P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$ (۰/۵) $p(k+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱/۵
۲	الف) نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض : ۲و۳ هر دو اول هستند و ۵=۳+۲ هم اول است .(۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی : $x = 2k+1 \Rightarrow (2k+1)(2k+3) \overset{(۰/۲۵)}{=} 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1 \overset{(۰/۲۵)}{=} 2k' + 1$	۱/۵
۳	مجموعه ۶۵ عضوی =S = تعداد کبوتر ها (۰/۲۵) ، باقیمانده های تقسیم بر ۱۶= {۰،۱،۲، ..... ،۱۵} = تعداد لانه ها(۰/۲۵) برطبق اصل لانه‌کبوتر(۰/۲۵) ، $65 = 4 \times 16 + 1 \Rightarrow 4 + 1 = 5$ (۰/۲۵) پس حداقل ۵ عضو باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ دارند.	۱
۴	$\frac{a^3 + b^3}{a+b} \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \overset{(۰/۲۵)}{\geq} (a+b)\,ab \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \overset{(۰/۵)}{\geq} (a+b)\,ab \Leftrightarrow$ $a^2 - ab + b^2 \overset{(۰/۲۵)}{\geq} ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده ایم پس حکم بر قرار است . (۰/۲۵)	۱/۵
۵	الف) درست ب) نادرست هر قسمت (۰/۲۵)	۰/۵
۶	الف) $A - (A - B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) طبق فرض	۲/۲۵
	« ادامه در صفحه‌ی دوم »	

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰
دانش آموزان‌و داوطلبان‌آزاد سراسرکشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

ب) راه حل اول : اثبات با برهان خلف (۰/۲۵)

$A \neq B \Rightarrow \exists x,y : x \in A, y \in B, x \neq y, C \neq \phi \Rightarrow z \in C$ (۰/۵)

$\Rightarrow (x,z) \in A \times C \ , (y,z) \in B \times C \ , (x,z) \neq (y,z)$ که این متناقض با فرض می باشد.

$\Rightarrow A \times C \neq B \times C$ (۰/۵)

راه حل دوم :

$\forall x \in A \ , y \in C \Rightarrow (x \ , y) \in A \times C \overset{A \times C = B \times C}{\underset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow}} (x \ , y) \in B \times C$

$\Rightarrow x \in B \ , y \in C \Rightarrow A \subseteq B$ (I) (۰/۲۵)

$\forall x \in B \ , y \in C \Rightarrow (x \ , y) \in B \times C \overset{A \times C = B \times C}{\underset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow}} (x \ , y) \in A \times C$

$\Rightarrow x \in A \ , y \in C \Rightarrow B \subseteq A$ (II) (۰/۲۵) (I), (II) $\Rightarrow A = B$ (۰/۲۵)

۷ — ۱/۲۵

هر سه زوج مرتب نوشته شده (۰/۲۵) در کل (۰/۷۵)

$A \times B = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۵)\}$

$R = \{(۱,۲),(۱,۵),(۴,۲),(۴,۵)\}$ (۰/۵)

۸ — ۱/۵

الف) $(a,b) \ R \ (a,b) \Rightarrow \frac{۲a-۳}{b} = \frac{۲a-۳}{b}$ (۰/۲۵) رابطه بازتابی

ب) $(a,b) \ R \ (c,d) \Rightarrow (c,d) \ R \ (a,b)$

$(a,b) \ R \ (c,d) \Rightarrow \frac{۲a-۳}{b} = \frac{۲c-۳}{d} \Rightarrow \frac{۲c-۳}{d} = \frac{۲a-۳}{b} \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

(۰/۲۵) رابطه تقارنی

ج) $(a,b) \ R \ (c,d) \ , \ (c,d) \ R \ (e,f) \Rightarrow (a,b) \ R \ (e,f)$

$\left.\begin{array}{l} (a,b) \ R \ (c,d) \Rightarrow \frac{۲a-۳}{b} = \frac{۲c-۳}{d} \\ (c,d) \ R \ (e,f) \Rightarrow \frac{۲c-۳}{d} = \frac{۲e-۳}{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲a-۳}{b} = \frac{۲e-۳}{f} \Rightarrow (a,b) R \ (e,f)$

(۰/۲۵) رابطه تعدی

هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است.(۰/۲۵)

$[(-۱,۷)] = \left\{ (x,y) \middle| (x,y) \ R \ (-۱,۷) \right\} \Rightarrow \frac{۲x-۳}{y} = \frac{۲(-۱)-۳}{۷} \Rightarrow y = \frac{-۱۴}{۵}x + \frac{۲۱}{۵}$ (۰/۵)

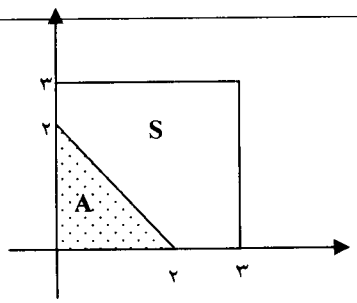
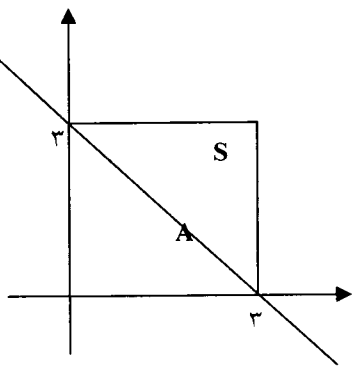
« ادامه در صفحه‌ی سوم »

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir

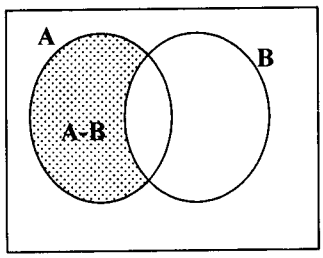
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	الف) پیشامد یا بر آمد ب) $۲^{۱۲}$ ج) پیوسته - گسسته هر قسمت (۰/۲۵)	۱
۱۰	$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۲,۵,۷,۱۱,۱۳\}$ (۰/۵) $B=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$ (۰/۵)	۱
۱۱	$p(A)=\dfrac{\overset{(۰/۲۵)}{\binom{۴}{۲}}\overset{(۰/۲۵)}{\binom{۶}{۱}}+\overset{(۰/۲۵)}{\binom{۴}{۳}}}{\underset{(۰/۲۵)}{\binom{۱۰}{۳}}}=\dfrac{۴۰}{۱۲۰}=\dfrac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۲	$P(۱)=۲P(۲)=۳p(۳)=۴p(۴)$ $p(۴)=x \xrightarrow{(۰/۲۵)} P(۱)=۴x \xrightarrow{(۰/۲۵)} p(۲)=۲x \xrightarrow{(۰/۲۵)} p(۳)=\dfrac{۴}{۳}x$ $p(۱)+p(۲)+p(۳)+p(۴)=۱ \Rightarrow ۴x+۲x+\dfrac{۴}{۳}x+x=۱ \xrightarrow{(۰/۲۵)} x=\dfrac{۳}{۲۵} \Rightarrow p(۱)=\dfrac{۱۲}{۲۵}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$p(A)=\dfrac{\overset{(۰/۵)}{\binom{۲۰}{۶}}}{\underset{(۰/۲۵)}{۲^{۲۰}}}$	۰/۷۵
۱۴	الف) $p(A)=\dfrac{\overset{(۰/۲۵)}{۲\times۲}}{\underset{(۰/۲۵)}{۹}}=\dfrac{۲}{۹}$ شکل (۰/۵)  ب) $P(B)=\dfrac{۰}{۹}=۰$ چون خط مساحتی ندارد. (۰/۲۵) شکل (۰/۲۵)  	۱/۵
	« ادامه در صفحه‌ی چهارم »	

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۲/ ۳/ ۱۳۹۰
دانش آموزان‌و داوطلبان‌آزاد سراسرکشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http: //aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۵	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (۰/۵) $۰/۷۵ = ۰/۵۵+۰/۶۰-P(A\cap B)$ $P(A\cap B)=۰/۴۰$ (۰/۵)	۱
۱۶	$A\cap B'=A-B\Rightarrow A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow P(A)=P(A\cap B')+P(A\cap B)\Rightarrow$ $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ (۰/۲۵)	
	$(A-B)$, $(A\cap B)$ دو پیشامد متمایز و از هم جدا هستند.(۰/۲۵)  شکل (۰/۲۵)	۱
	« موفق باشید » جمع نمره	۲۰

مصححین گرامی :

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.

www.alm.loxblog.com